THETA SERIES CONSTRUCTED FROM INVARIANT E_{8}-HARMONIC POLYNOMIALS (Analytic and Arithmetic Theory of Automorphic Forms)

AUTHOR(S):

森山, 知則

CITATION:

森山, 知則. THETA SERIES CONSTRUCTED FROM INVARIANT E_{8}-HARMONIC POLYNOMIALS (Analytic and Arithmetic Theory of Automorphic Forms). 数理解析研究所講究録 2019, 2100: 43-51

ISSUE DATE:

2019-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/251792

数理解析研究所講究録 第2100巻 2019年 43-51

THETA SERIES CONSTRUCTED FROM INVARIANT E_8-HARMONIC POLYNOMIALS

大阪大学理学研究科数学専攻
森山知則 (Tomonori Moriyama)

はじめに 本稿では、筆者（=森山) の指導の下で書かれた表題のテーマに関する船田祐希氏の修士論文 [Funada16] の結果を紹介する (§2, §§3.1)。あわせて、加藤義久氏による関連研究（これも筆者の指導の下に書かれた修士論文 [Kato17] に含まれる）についても述べる (§§3.2)。なお, RIMS での講演後に船田氏の計算には一部に誤りがあったことが判明し、その修正計算が加藤氏によって行われたことを付記しておく（後で具体的に指摘する)。これらの計算の修正に加え、講演後の質疑応答を踏まえて問題意識にも多少の変化があったので、この原稿の叙述の仕方は講演とはいくらか異なることをお断りしておく。

目次

§1 Theta series associated with harmonic polynomials

この節では調和多項式に付随したテータ級数について復習する。

1.1 調和多項式の空間. $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]$ を複素数係数の m 変数多項式環とする。これを自然に m 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^m$（縦ベクトルとする）上の複素数値函数のなす複素線形空間 $\mathrm{Map}(\mathbf{R}^m, \mathbf{C})$ の部分空間とみなす。$\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]$ の斉次 l 次式のなす部分空間を $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l$ で表す:

$$\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l = \{\phi \in \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m] \mid \phi(ax) = a^l \phi(x),\ \forall a \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^m\}.$$

$Q = {}^tQ \in M(m, \mathbf{Z})$ を次数 m の正定値整数成分対称行列とし、Q に関する直交群 $O(Q)$ 及び特殊直交群 $SO(Q)$ を

$$O(Q) := \{h \in GL(m, \mathbf{R}) \mid {}^thQh = Q\} \text{ および } SO(Q) := \{h \in SL(m, \mathbf{R}) \mid {}^thQh = Q\},$$

でそれぞれ定める。また, Q に関するラプラス作用素 Δ_Q を次で定める：

$$\Delta_Q := \sum_{i,j=1}^{m} q^{i,j} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j}, \qquad Q^{-1} = (q^{i,j})_{1 \le i,j \le m}.$$

Q-調和多項式の空間 $\mathcal{H}(Q)$ を

$$\mathcal{H}(Q) := \{\phi \in \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m] \mid \Delta_Q \phi = 0\}$$

で定義しよう。このとき次の直和分解が成立する:

$$\mathcal{H}(Q) = \bigoplus_{l \geq 0} \mathcal{H}_l(Q), \qquad \mathcal{H}_l(Q) := \mathcal{H}(Q) \cap \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l.$$

直交群 $O(Q)$ の $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]$ 上の線形表現を

$$[h \cdot \phi](x) = \phi(h^{-1}x), \qquad h \in O(Q), \phi \in \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l.$$

で定める。ラプラス作用素 Δ_Q と上記の直交群 $O(Q)$ の作用は可換なので l 次斉次調和多項式の空間 $\mathcal{H}_l(Q)$ は直交群 $O(Q)$ の作用で保たれる。したがって直交群 $O(Q)$ の線形表現 $O(Q) \to GL(\mathcal{H}_l(Q))$ を得る。このとき、次の定理が成立する：

Proposition 1. *(i)* $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(Q) = \binom{l+m-1}{m-1} - \binom{l+m-3}{m-1}$.
(ii) $m \geq 3$ のとき l 次斉次調和多項式の空間 $\mathcal{H}_l(Q)$ は特殊直交群 $SO(Q)$ の既約表現である。
(iii) $m \geq 1$ に対して　$\mathcal{H}_l(Q)$ は直交群 $O(Q)$ の既約表現である。

Proof. $Q = I_m$ (単位行列) として一般性を失わないのでそのようにする。
(i) ラプラス作用素 Δ_{I_m} の $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l$ への制限は、全射

$$\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l \to \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_{l-2}$$

を導くことを言えばよい。この全射性はよく知られているが、その簡明な証明が [Lang99, Lecture 6] に与えられている。
(ii) は最高ウエイトベクトルを探して、Weyl の次元公式を用いればよい。
(iii) は $m \geq 3$ ならば (ii) から従う。また、$m = 1$ のとき、$\mathcal{H}(I_1) = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}x_1$ であることから容易にわかる。$m = 2$ のとき、(i) より $l > 0$ のとき $\mathcal{H}_l(I_2)$ は 2 次元であることに注意すれば、

$$\mathcal{H}_l(I_2) = \mathbf{C}(x_1 + \sqrt{-1}x_2)^l \oplus \mathbf{C}(x_1 - \sqrt{-1}x_2)^l, \qquad l > 0$$

であることがすぐ確かめられる。これから所望の既約性が容易に従う。 □

$m = 3$ の場合には、$\phi \in \mathcal{H}_l$ の球面 S^2 への制限が, 球面 S^2 上のラプラス作用素の固有値 $-l(l+1)$ の固有函数（球函数）となることが示される。このことから, 一般の m でも調和多項式を球函数と呼ぶこともある。

1.2 調和多項式 (=球函数) に付随するテータ級数. 簡単のため Q を even integral (i.e. $Q[\mathbf{Z}^m] \subset 2\mathbf{Z}$) で unimodular（i.e. $\det Q = 1$) であるとしよう。このとき, m は 8 の倍数であることはよく知られている。複素上半平面を $\mathfrak{H}$ で表し、その要素を τ と書くことにする。このとき、$\phi \in \mathcal{H}_l(Q)$ に対して、

$$\theta_{Q,l}(\phi, \tau) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \phi(\xi) \exp(\frac{1}{2} Q[\xi] \tau), \qquad \tau \in \mathfrak{H}$$

で定義される級数 $\theta_{Q,l}(\phi, \tau)$ は絶対収束して、$SL(2, \mathbf{Z})$ に関する重さ $k = l + m/2$ の楕円保型形式の空間 $M_k \equiv M_k(SL(2, \mathbf{Z}))$ に属する (例えば [Miyake, Chapter 4] を参照)。こ

れを調和多項式 $\phi \in \mathcal{H}_l(Q)$ に付随する theta 級数と呼ぶ。さらに $l > 0$ のときには、これはカスプ形式の空間 $S_k \equiv S_k(SL(2,\mathbf{Z}))$ に属する。したがって, $l > 0$ のとき

$$\theta_{Q,l} : \mathcal{H}_l(Q) \to S_{l+m/2}(SL(2,\mathbf{Z}))$$

なる線形写像（以下テータ写像と呼ぶ）が定まる。なお, l が奇数の場合には $\theta_{Q,l}$ はゼロ写像であることに注意しよう。上の命題とカスプ形式の次元公式から

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(Q) \sim l^{m-2}, \qquad \dim_{\mathbf{C}} S_{l+m/2}(SL(2,\mathbf{Z})) \sim l \qquad l = 2l' \to \infty$$

となることはすぐわかる (ここで, $a_l \sim b_l$ は, $l' = l/2 \to \infty$ のとき, 比 a_l/b_l がある有限の正の値に収束するという意味とする)。$m \geq 4$ (m は 8 の倍数) であることも考慮すれば, テータ写像 $\theta_{Q,l}$ は一般には大きな核を持つ。

1.3 不変調和多項式の空間. 上述のようにテータ写像 $\theta_{Q,l}$ の核は大きい。さらに, この核 $\mathrm{Ker}(\theta_{Q,l})$ は自明な大きな部分空間を持つことを有限群の表現論を用いて示そう。直交群 $O(Q)$ の整数点のなす部分群

$$O(Q,\mathbf{Z}) := O(Q) \cap GL(m,\mathbf{Z})$$

を考えよう。$O(Q,\mathbf{Z})$ はコンパクト位相群 $O(Q)$ の離散部分群なので有限群である。したがって, 有限群の表現論から次の直和分解が成立する:

$$\mathcal{H}_l(Q) = \mathcal{H}_l(Q)^{O(Q,\mathbf{Z})} \oplus \mathcal{H}_l(Q)(O(Q,\mathbf{Z})).$$

ここで

$$\mathcal{H}_l(Q)^{O(Q,\mathbf{Z})} := \{\phi \in \mathcal{H}_l(Q) \mid \gamma \cdot \phi = \phi \quad \forall \gamma \in O(Q,\mathbf{Z})\}$$

及び

$$\mathcal{H}_l(Q)(O(Q,\mathbf{Z})) := \langle \phi - \gamma \cdot \phi \mid \phi \in \mathcal{H}_l(Q) \rangle_{\mathbf{C}}$$

と置いた。さて、このとき次に注意しよう。

Proposition 2. 次の包含関係が成立する：

$$\mathcal{H}_l(Q)(O(Q,\mathbf{Z})) \subset \mathrm{Ker}(\theta_{Q,l}).$$

Proof. 任意の $\gamma \in O(Q,\mathbf{Z})$ に対して

$$\theta_{Q,l}(\gamma \cdot \phi, \tau) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (\gamma \cdot \phi)(\xi) \exp(\frac{1}{2}Q[\xi]\tau)$$
$$= \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} (\gamma \cdot \phi)(\gamma\xi) \exp(\frac{1}{2}Q[\gamma\xi]\tau) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \phi(\xi) \exp(\frac{1}{2}Q[\gamma\xi]\tau)$$
$$= \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^m} \phi(\xi) \exp(\frac{1}{2}Q[\xi]\tau) = \theta_{Q,l}(\phi, \phi)$$

となる。これより、所望の結果を得る。 □

Proposition 2より、テータ写像$\theta_{Q,l}$の像や核を調べるときには調和多項式の空間$\mathcal{H}_l(Q)$の$O(Q,\mathbf{Z})$-不変部分$\mathcal{H}_l(Q)^{O(Q,\mathbf{Z})}$にのみ着目すればよいことが分かった。ところで, ラプラス作用素Δ_Qと有限群$O(Q,\mathbf{Z})$の線形作用の可換性からΔ_Qの不変式環$\mathbf{C}[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{O(Q,\mathbf{Z})}$への制限もまた全射であることがわかる。これより、次の命題が成立する。

Proposition 3. $O(Q,\mathbf{Z})$-不変なQ-調和多項式の空間の次元は, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_l(Q)^{O(Q,\mathbf{Z})}\\ &=\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[x_1,x_2,\cdots,x_m]_l^{O(Q,\mathbf{Z})}-\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[x_1,x_2,\cdots,x_m]_{l-2}^{O(Q,\mathbf{Z})}.\end{aligned}$$

この命題を考慮に入れると, 不変式環$\mathbf{C}[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{O(Q,\mathbf{Z})}$について詳しいことがわかる場合に, 上記の（不変調和多項式に制限した）テータ写像を具体的に調べることができるであろう。不変式環の構造が明示的に知られている場合として$Q=E_8$ (E_8行列) の場合がある。この場合について調べた結果を次節で述べる。

§2 E_8行列の場合の計算結果

この節では, $Q=E_8$ (E_8型ルート系のCartan行列) とする。この場合のテータ写像$\theta_{E_8,l}$の像の次元 (したがって核の次元) についてTheorem 4の表が得られる。この表の$l\leq 20$までは, 船田氏 [Funada16] によって計算機を用いて$\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$の基底を求めるという方法により作成された。ところが, 講演後, 計算機の助けなしに理論的にこの結果を得ることができることが判明した。両者を照らし合わせてみると, $l=18,20$の場合に船田氏の計算に誤りがあることがわかった。そこで、加藤義久氏に計算機で再計算してもらったが、その結果は理論的な計算と整合的であることが確認された。

2.1 theta写像の像と核の次元. $Q=E_8$の場合にテータ写像に関して次の表が得られる。

Theorem 4. *(Y.Funada, corrected by Y.Kato and T.Moriyama)* $k:=l+4$ 及び

$$I_l:=\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[x_1,\cdots,x_8]_l^{O(E_8,\mathbf{Z})},\quad h_l^{\mathrm{inv}}:=\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})},\quad S_k=S_k(SL(2,\mathbf{Z}))$$

$$\Theta_{l+4}:=\mathrm{Im}(\theta_{E_8,l}:\mathcal{H}_l(E_8)\to S_{l+4})=\mathrm{Im}(\theta_{E_8,l}:\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}\to S_{l+4})$$

と置こう。このとき次の表が成立する。

l	k	$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_8)$	I_l	h_l^{inv}	$\dim_{\mathbf{C}} \Theta_{l+4}$	$\dim_{\mathbf{C}} S_{l+4}$
2	6	35	1	0	0	0
4	8	294	1	0	0	0
6	10	1386	1	0	0	0
8	12	4719	2	1	1	1
10	14	13013	2	0	0	0
12	16	30940	3	1	1	1
14	18	65892	4	1	1	1
16	20	128877	5	1	1	1
18	22	235543	6	1	1	1
20	24	407330	8	2	2	2
22	26	672750	9	1	1	1
24	28	851760	12	3	2	2

この表を得るための理論的な計算方法の概要は次のとおりである。まず $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_l(E_8)$ は前節で述べた通りよく知られている。次に 2.2 節で述べるように, 不変斉次多項式の次元

$$I_l = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_8]_l^{O(E_8,\mathbf{Z})}$$

は, $O(E_8, \mathbf{Z})$ が E_8 型 Weyl 群 $W(E_8)$ に同型であることから、Weyl 群の不変式環の構造に関する Chevalley の有名な結果に帰着される。次に不変調和多項式の空間 $\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ の次元を求めねばならないが、これは Proposition 3 からわかる。S_k の次元はよく知られているので、テータ写像の像の次元 $\dim_{\mathbf{C}} \Theta_k$ が問題となる。ところが, 実はかなり前から $\Theta_k = S_k$ $(k > 0)$ であることが知られていた。このことは、RIMS での筆者の講演後の質疑応答時に Boecherer 氏と伊吹山氏からご教示いただいた。ここに記して感謝したい。以下, この理論的な計算について順にもう少し詳しく述べる。

2.2 $O(E_8)$-不変式環. まず, 一般に D.Hilbert の有名な結果により, 有限群の不変式環は有限生成であることに注意しよう。さらに E_8 型 Weyl 群 $W(E_8)$ から直交群 $O(E_8, \mathbf{Z})$ へ自然な単射があるが, これは同型であることも比較的容易に示される。 $W(E_8)$ は有限鏡映群であり、その不変式環の構造は C. Chevalley によって知られている。具体的には次の通りである。

Proposition 5. *(Chevalley,1955)* 不変式環 $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]^{W(E_8)}$ は 8 変数多項式環に同型である。より詳しくは 8 個の代数的に独立な斉次多項式 $P_{a+1}(x)$ $(1 \leq a \leq 30, \gcd(a, 30) = 1)$ で

$$\deg(P_{a+1}) = a + 1, \qquad \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]^{W(E_8)} = \mathbf{C}[P_{a+1} \mid 1 \leq a \leq 30, \gcd(a, 30) = 1]$$

を満たすものが存在する。

この命題から, 斉次 $W(E_8)$ 不変式の次元について次がわかる。

$$\sum_{l=0}^{\infty} \dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_m]_l^{W(E_8)})t^l$$
$$= \frac{1}{(1-t^2)(1-t^8)(1-t^{12})(1-t^{14})(1-t^{18})(1-t^{20})(1-t^{24})(1-t^{30})}.$$

斉次多項式 $P_{a+1}(x)$ は Weyl 群 $W(E_8)$ の basic invariants（基本不変式）と呼ばれる. これより、$W(E_8)$ の位数が basic invariants の次数の積に等しいこと

$$\sharp W(E_8) = \prod_{1\leq a\leq 30, \gcd(a,30)=1} (a+1) = 2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$$

が証明される (有限鏡映群について同様なことが言える。例えば, 対称群の不変式環が基本対称式で生成され、基本対称式たちは代数的に独立であることから、A_n 型 Weyl 群に関する自明な等式 $\sharp W(A_n) = \sharp S_{n+1} = (n+1)!$ を得る)。この命題の証明及び周辺の興味深い様々な事実は [Humphreys90, Chapter 2] にまとめられている。

2.3 $\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ の次元. Proposition 3 と Proposition 5 から $O(E_8,\mathbf{Z})$-不変調和多項式の空間 $\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8)}$ の次元について次がわかる。

Corollary 6. $\mathcal{H}_l(E_8)^{W(E_8)}$ たちの次元について

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\dim_C \mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})})t^l$$
$$= \frac{1}{(1-t^8)(1-t^{12})(1-t^{14})(1-t^{16})(1-t^{18})(1-t^{20})(1-t^{30})}$$

が成立する。

2.4 テータ写像の像. すでにこの節の初めに述べたように、$\Theta_k = S_k$ $(k \geq 0)$ が成立する。これは調和多項式に付随するスカラーウェイトの $Sp(n,\mathbf{Z})$ に関する Siegel カスプ形式についての一般的な結果 ([Boecherer89, Theorem 5]) の特別な場合である。なお、Boecherer 氏の論文には, 番号付のミスなのか Theorem 5 が 2 つあるが, 15 ページにある方の Theorem 5 である。そこで注意されているように、楕円保型形式の場合には, この結果は [Waldspurger79] によっても知られていたとのことである。S_k の次元はよく知られているから, Theorem 4 の表が完成する。この表をさらに大きな l まで順次伸ばしていくことも容易である。

§3 不変調和多項式の基底とそのノルム

Theorem 4 の表を $l \leq 20$ まで作成したとき、当初は $\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ の次元を与える Proposition 3 及び小節 2.4 で述べた Boecherer ないしは Waldspurger の結果について気付いていなかった。そのため、不変調和多項式 $\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ の基底を計算系を用いて求めて、さ

らにそのテータ写像による像のフーリエ係数を計算することで表を作成した ([Funada16])。しかし、§2 で述べたように、幸か不幸か計算機の助けなしに理論的に Theorem 4 のテーブルが作成できることが判明したわけである。

ところで、船田氏が決定した $\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ $(8 \leq l \leq 16)$ の基底について、それを自然な方法で正規化したものの「ノルム」の計算が加藤義久氏 [Kato17] によって行われた。この節ではこの計算結果を述べる。これは、（今のところ）理論的には求められないので、船田氏が計算機を用いて求めた不変調和多項式の具体的の応用例といえる。

3.1. 不変調和多項式の基底の具体形. まずテータ写像の像となる楕円保型形式に関する記号を定めておこう。よく知られているように

$$\oplus_{k\geq 0} S_k = \Delta\mathbf{C}[G_4, G_6]$$

である。ここで、$\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \in S_{12}$ は Ramanujan のデルタ函数で、$G_k \in M_k$ $(k \geq 4, k \in 2\mathbf{Z})$ は重さ k の Eisenstein 級数で定数項を 1 となるように正規化したものとする。このとき

$$\Delta_{12} := \Delta, \quad \Delta_k(q) := \Delta(q) \times G_{k-12}(q) \quad (k \in \{16, 18, 20, 22, 26\})$$

と置けば, $S_k = \mathbf{C}\Delta_k$ $(k \in \{12, 16, 18, 20, 22, 26\})$ となる。Theorem 4 の表によれば,

$$\theta_{E_8,k-4}(\phi_{\Delta_k}, \tau) = \Delta_k(\tau)$$

を満たす $O(E_8, \mathbf{Z})$ 不変調和多項式 $\phi_{\Delta_k}(x) \in \mathcal{H}_{k-4}(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ が一意的に存在する。そこで, ϕ_{Δ_k} を具体的に求めるという問題を考えてみる。自明な関係

$$\mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})} = \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_8]^{O(E_8,\mathbf{Z})} \cap \mathcal{H}_l(E_8)$$

に着目すると、不変式環の生成元であるところの基本不変式の明示形がわかればよい。有限鏡映群の基本不変式の明示式を得る問題に関しては様々な研究があるようであるが、最終的に [Mehta88] によって解決された。Mehta の与えた $W(E_8)$ に関する基本不変式を $P_{a+1}(x)$ $(1 \leq a \leq 30, \gcd(a, 30) = 1)$ とする。 これから $\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_8]_l^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ の基底が求めることができる。それらにラプラス作用素を施して計算することで次の命題の結果が定数倍を除いて得られる。これらの不変調和多項式が定めるテータ級数のフーリエ展開の $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ の係数を計算することで、比例定数も決まって次の結果を得る。

Proposition 7. *([Funada16])*

$$\begin{aligned}
\phi_{\Delta_{12}}(x) &= \frac{1}{933,120,000} \times \Big\{-P_2(x)^4 + 54,000P_8(x)\Big\},\\
\phi_{\Delta_{16}}(x) &= \frac{13}{282,240} \times \Big\{P_{12}(x) + \frac{847}{5,054,400,000}P_2(x)^6 - \frac{11}{1,040}P_8(x)P_2(x)^2\Big\},\\
\phi_{\Delta_{18}}(x) &= \frac{1}{23,760} \times \Big\{P_{14}(x) - \frac{5,863}{311,040,000,000}P_2(x)^7\\
&\quad + \frac{143}{115,200}P_8(x)P_2(x)^3 - \frac{91}{480}P_{12}(x)P_2(x)\Big\},\\
\phi_{\Delta_{20}}(x) &= \frac{4,837}{322,486,272,000,000,000} \times \Big\{P_2(x)^8 - \frac{344,520,000}{4,837}P_8(x)P_2(x)^4\\
&\quad + \frac{10,905,840,000,000}{33,859}P_8(x)^2 + \frac{48,729,600,000}{4,837}P_{12}(x)P_2(x)^2\\
&\quad + \frac{2,115,072,000,000}{33,859}P_{14}(x)P_2(x)\Big\}.
\end{aligned}$$

[Funada16] では、さらに「$\mathcal{H}_{18}(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})} = \mathcal{H}_{20}(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})} = \{0\}$ である」と述べられているが, これは2節で述べた理論的な考察と矛盾し誤りである。この誤りは, RIMS での筆者の講演後に判明したが, 加藤氏によって修正されて、$\mathcal{H}_{18}(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ 及び $\mathcal{H}_{20}(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})}$ の基底も得られている。これらの基底の明示的な形はここでは略する。

3.2. 不変調和多項式の基底のノルム. 8変数多項式環 $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_8]$ は reductive dual pair $(O(E_8), SL(2,\mathbf{R}))$ に対する oscillator 表現の表現空間 $L^2(\mathbf{R}^8)$ の中へ

$$\phi(x) \mapsto \phi(x)\exp(-\pi E_8[x])$$

によって自然に埋め込むことができる。そこで8変数多項式 $\phi(x) \in \mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots, x_8]$ のノルム $||\phi(x)||$ を

$$||\phi(x)||^2 := \int_{\mathbf{R}^8} |\phi(x)\exp(-\pi E_8[x])|^2 dx$$

で定める。上で求めた、$\phi_{\Delta_k}(x)$ $(k \in \{12, 16, 18, 20\})$ についてそのノルムを計算すると次のようになる。

Proposition 8. *([Kato17, §4])*

$$\begin{aligned}
||\phi_{\Delta_{12}}(x)||^2 &= \frac{7}{2^{11} \times 3 \times \pi^8},\\
||\phi_{\Delta_{16}}(x)||^2 &= \frac{3^3 \times 5 \times 11 \times 13}{2^{26} \times 7 \times \pi^{12}},\\
||\phi_{\Delta_{18}}(x)||^2 &= \frac{3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13}{2^{26} \times \pi^{14}},\\
||\phi_{\Delta_{20}}(x)||^2 &= \frac{3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 17}{2^{29} \times \pi^{16}}.
\end{aligned}$$

3.3. 関連研究及び展望 (i) 三枝崎氏 [Miezaki13] は, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合にテータ写像を別の視点から調べている。その場合にはテータ写像の不変調和多項式の空間への制限は単射であることが示されている。

(ii) $Q = E_6$ の場合には, $O(E_6, \mathbf{Z})$ は E_6 型 Weyl 群 $W(E_6)$ に同型な部分群を指数 2 で含む（E_6 型ルート系は位数 2 の自己同型を持つことに注意）。$Q = E_7$ の場合には, $O(E_7, \mathbf{Z})$ は E_7 型 Weyl 群 $W(E_7)$ に同型である。これら 2 つの場合にも, テータ写像の不変調和多項式への制限の像や核が, l が小さい場合に計算機を用いて加藤氏が最近調べている（$Q = E_6$ の場合, [Kato17] に Theorem 4 に相当する表が作成されている）。

(iii) さて、Theorem 4 の表を見ると重さ $k = 28$ にして初めて, テータ写像の不変調和多項式への制限が核を持つことがわかる。このテータ写像の核

$$\mathrm{Ker}(\theta_{E_8,l} : \mathcal{H}_l(E_8)^{O(E_8,\mathbf{Z})} \to S_{l+4})$$

の次元は l を大きくしていくと l^6 のオーダーで大きくなる。この核の構造を直交群 $O(E_8)$ 上の "full modular" 群 $O(E_8, \mathbf{Z})$ に関する保型形式のヘッケ理論の観点から調べるのは興味ある問題と思われる。この方向では (本稿の状況設定とは少し異なるが) 興味ある研究 [Ihara64] があることを注意しておこう。

References

[Boecherer89] Boecherer, S, *Siegel modular forms and theta series*, Proc.Symposia in Pure Mathematics **49-2**, 3 – 17 (1989).

[Funada16] Funada, Y., $O(E_8, \mathbf{Z})$-不変球関数を用いたテータ関数の構成, 大阪大学修士論文, (2016).

[Humphreys90] Humphreys, J.E., Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge University Press,(1990).

[Ihara64] Ihara, Y., *On certain arithemtical Dirichlet series*, J. Math. Soc. Japan **16**, 214 – 225 (1964).

[Kato17] Kato, Y., $O(E_6, \mathbf{Z})$-不変調和多項式に付随したテータ級数の構成, 大阪大学修士論文, (2017).

[Lang99] Lang, S., Math talks for undergraduates, Springer (1999).

[Mehta88] Mehta, M.L, *Basic Set of Invariant Polynomials for Finite Reflection Group*, Communications in Algebra, **16**, 1083-1097, (1988).

[Miezaki13] Miezaki, T., *On a generalization of spherical designs*, Discrete Math **313**, 375 – 380 (2013).

[Miyake89] Miyake, T., Modular Forms, Springer (1989).

[Waldspurger79] Waldspurger, J. L., *Engendrement par des series theta de cerains espaces de formes modulaires,* Invent Math. **50**, 135-168 (1979).

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama-cho 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan

E-mail address: moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp